DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

Prova scritta di **Geometria**

A.A. 2021-2022

09/11/2022

Durata: 90 minuti. Giustificare ogni affermazione. E' vietato l'uso di libri e appunti. Per superare la prova è necessario svolgere, in maniera corretta e completa, almeno tre punti, uno dei quali dev'essere un punto dell'Esercizio 3.

1. Siano U e V i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0 = x + 2y + ht\}$$

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + t = 0 = x + y + 2t\}$$

   (a) Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinare una base e la dimensione di $U + V$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2. Siano v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (1, 1, 2)$$

   (a) Dopo avere verificato che $\mathcal{B} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di $\mathbb{R}^3$, trovare le componenti del vettore $(1, 2, 3)$ rispetto a $\mathcal{B}$.

   (b) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$\begin{cases} f(v_1) = 2v_1 \\ f(v_2) = v_1 + hv_2 \\ f(v_3) = v_1 + 3v_3 \end{cases}$$

   Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ e determinare una base per il nucleo e l'immagine di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

   (c) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

E' fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u$ nello spazio

3. Siano r_1 e r_2 le rette che hanno le seguenti equazioni parametriche:

$$r_1 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = 3t + 3 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = t - 3 \end{cases}$$

   (a) Verificare che r_1 e r_2 sono sghembe e scrivere le equazioni cartesiane di r_1 e r_2.

   (b) Dopo avere verificato che le rette r_1 e r_2 non passano per il punto $P = (1, 0, 0)$, trovare un'equazione della retta s che è incidente a r_1 e r_2 e passa per P.